第 25 卷 第 1 期
2004 年 1 月
华南农业大学学报(自然科学版)
Journal of South China Agricultural University(Natural Science Edition)
Vol.25, No.1
Jan. 2004

关于非正态总体的工序能力指数 C_p 值计算的研究

郭正光, 张国权, 魏福义

(华南农业大学 理学院,广东 广州 510642)

摘要:就化工等行业中普遍存在的产品质量稳定而工序能力指数偏低的问题,进行了较为深入的研究. 研究表明,上述问题是由于工序产品的质量指标 X 在局部范围内不服从正态分布所导致,进而指出了现行的工序能力指数的计算方法在某些行业(如化工等行业)的不适用性. 根据该研究结果,当产品质量指标 X 在服从上述非正态分布时,依据数理统计的基本原理,在导致第一类错误发生的概率不大于 0.27%的前提下,重新定义工序能力指数的计算公式即可以有效地解决上述问题.

关键词:非正态总体; 工序能力; 工序能力指数

中图分类号:O212;C8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001-411X (2004) 01-0110-02

Research on computing the value of the work procedure ability index C_p

GUO Zheng-guang, ZHANG Guo-quan, WEI Fu-yi

(College of Sciences, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: This thesis aims at an in-depth research of the phenomenon-steadiness in product quality but low index of work procedure ability, which generally exists in such fields as chemical industry. The research proves that the above-mentioned problem results form the fact that the quality index of work procedure products X is not subordinate to the normal distribution in parts of an area. And it further proves that the current calculating method of work procedure ability index is unadaptable in some areas such as chemical industry. According to the research result of the thesis, it can be concluded that redefining the calculating formula of work procedure ability index may lead to an effective solution of the above problem, with the quality index of work procedure products X subordinate to the above abnormal distribution, mathematical statistics as fundamental principle, and the probability leading to the first-class error less than 0.27%.

Key words: non-normal totality; work procedure ability; work procedure ability index

工序能力是受控状态下工序对加工质量的保证能力. 用数理统计的语言来表述,工序能力就是在一定的生产条件下,工序产品的质量指标 X 假设在服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的前提下,落在质量标准 $[T_L, T_U]$ 范围中的概率. 生产出的合格品越多,工序能力就越高,通常用工序能力指数 C_p 值反映工序能力的高低. 现行工序能力指数的计算方法:设质量标准上限为 T_U,下限为 T_L,质量标准范围 $T=T_U-T_L$,中心 $M=(T_U-T_L)/2$,当 $\mu=M$ 时,称之为工序无偏;当 $\mu\neq M$ 时,称之为工序有偏. 如果工序无偏,则 $C_p=T/(6\sigma)=(T_U-T_L)/6\sigma$;如果工序有偏,则工序能力指数定义为 C_{pk}, $C_{pk}=(1-k)C_p$,其中 $k=2|\mu-M|/T$. 由上述计算公式可知,C_p值的大小应直接反映工序能力的高低. 通常在生产实际中判断标准[1]是:当 $C_p>1.67$(即 $T>10\sigma$)时,认为工序能力过剩;当 $1.33<C_p\leqslant1.67$(即 $8\sigma<T\leqslant10\sigma$)时,认为工序能力充足;当 $C_p=1.33$(即 $T\approx8\sigma$)时处于理想状态;当 $1.00<C_p\leqslant1.33$(即 $6\sigma<T\leqslant8\sigma$)时,认为工序能力正常;当 C_p 值接近 1(即 $T\approx6\sigma$)时,有超差危险,应当加强管理;当 $0.67<C_p\leqslant1$(即 $4\sigma<T\leqslant6\sigma$)时,认为工序能力不足;当 $C_p\leqslant0.67$(即 $T\leqslant4\sigma$)时,认为工序能力严重不足,此时必须查找原因,采取相应的对策.

1 目前工序能力指数计算存在的问题

以上有关工序能力及工序能力指数的计算及其理论,起源于机械行业,现已广泛地应用于其他各个

收稿日期:2002-07-11　　**作者简介**:郭正光(1954-),男,教授.

基金项目:华南农业大学校长基金资助项目(4900-K01153)

工业系统. 但在生产实际中,尚有许多问题有待研究,特别是化工系统尤为突出. 常表现为产品合格率稳定地保持在 100%,而工序能力指数 C_p 值仅为 0.6 ~0.8,甚至更低. 对此问题,国内外许多学者做了大量的研究,提出了一些修改公式的方法. 然而,由于目前所沿用的计算公式是在工序产品的质量指标服从正态分布的背景下给出的,但在一些特定的场合,指标数据并不服从正态分布,因此以正态分布为前提所获得的统计分析结果必然会与实际状态相矛盾. 例如,生产某种产品的关键工序一般是依赖装置中化学反应来实现的,操作者常常不是直接参与产品质量参数的形成,而是间接地控制反应条件来影响反应质量,从而影响产品质量. 操作者注意力的变化会影响结果数据的分布. 在"一般注意"时,能形成符合正态分布的数据群,但在某些局部"加强注意"时就会使数据不符合"一般注意"条件下的正态分布. 在工艺参数控制中,当数据处于$(\mu - s\sigma, \mu + s\sigma)$之间时,操作者往往持"一般注意",当数据处于$(\mu - t\sigma, \mu - s\sigma)$或$(\mu + s\sigma, \mu + t\sigma)$之间时(其中 $t > s > 0$, $s、t \in R^+$),特别是接近 $\mu \pm t\sigma$ 时,必持"加强注意",这是因为有其责任制所带来的各种软硬约束作用的综合结果,此时,工序产品质量指标的数据不再服从正态分布,这种情形本文称其为"卡边随机现象".

2　非正态总体 C_p 值的计算

工序能力指数的计算及其工序能力判断标准的理论依据是数理统计中众所周知的"3σ"原理. 即假设产品质量指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99.73\%$. 如果 C_p 值越大,就越有理由相信产品的质量指标满足质量要求,而由此导致第一类错误(即拒真错误)发生的概率仅为 0.27%. 在工序控制的实践中,由于总体分布的参数未知,所以一般是抽取一个容量 $n \geqslant 50$ 的随机样本,其样本均值为 $\bar{X}$,样本标准差为 S,则

$$\hat{C}_p = T/6S = (T_U - T_L)/6S,$$
$$\hat{C}_{pk} = (1 - k)\hat{C}_p,$$
$$k = 2 \mid \mu - M \mid /T.$$

根据文献[2、3]的研究结果,如果产品质量指标 Y 服从卡边分布,重新定义工序能力指数为:

$$C_p = T/B\sqrt{D(Y)} = (T_U - T_L)/B\sqrt{D(Y)},$$
$$\hat{C}_p = T/BS = (T_U - T_L)/BS, \tag{1}$$
$$\hat{C}_{pk} = (1 - k)\hat{C}_p, \quad k = 2 \mid \mu - M \mid /T, \tag{2}$$

其中,B 为常数,$\sqrt{D(Y)}$ 为卡边随机变量 Y 的标准差.

据数理统计的基本原理,令 $P(\mu - B\sqrt{D(Y)}/2 < Y < \mu + B\sqrt{D(Y)}/2) \geqslant 99.73\%$. 根据标准卡边随机变量的定义 $Z = (Y - \mu)/\sigma$,所以 $D(Y) = \sigma^2 D(Z)$,即$\sqrt{D(Y)} = \sigma\sqrt{D(Z)}$.

故
$$P\left(\mu - \frac{1}{2}B\sqrt{D(Y)} < Y < \mu + \frac{1}{2}B\sqrt{D(Y)}\right) = P\left(-\frac{B}{2}\sqrt{D(Z)} < \frac{Y - \mu}{\sigma} < \frac{B}{2}\sqrt{D(Z)}\right) = P\left(-\frac{B}{2}\sqrt{D(Z)} < Z < \frac{B}{2}\sqrt{D(Z)}\right) = 2P\left(Z < \frac{B}{2}\sqrt{D(Z)}\right) - 1 \geqslant 99.73\%.$$

即
$$F\left(\frac{B}{2}\sqrt{D(Z)}\right) = P\left(Z < \frac{B}{2}\sqrt{D(Z)}\right) \geqslant 0.998\,65.$$

为了实用的方便并结合化工系统中工序控制的实际问题,笔者曾在文献[2]中导出了标准卡边随机变量 Z 的概率分布函数为:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < -t \\ \Phi\left[\ln\left(\frac{t+z}{t-s}\right)^m - s\right], & -t \leqslant z < -s \\ \Phi(z), & -s \leqslant z < s \\ \Phi\left[\ln\left(\frac{t-s}{t-z}\right)^m + s\right], & s \leqslant z < t \\ 1, & z \geqslant t \end{cases}$$

其中 $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,同时编制了当 $s = 1$, $t = 2$时的标准卡边函数分布表 $F_{1,2}(x)$,并且在文献[3]中导出了卡边分布函数的特征函数和数字特征,同时求得 $D(Z) \approx 0.8$. 经查表 $F_{1,2}(x)$ 得: $F_{1,2}(1.86) = 0.998\,4$, $F_{1,2}(1.87) = 0.998\,8 > 0.998\,65$. 取$(B/2)\sqrt{D(Z)} = (B/2)\sqrt{0.8} = 1.87$,则 $B \approx 4.18$. 所以,当随机变量 Y 服从参数为$s = 1$, $t = 2$ 的卡边分布时

$$C_p = T/4.18\sqrt{D(Y)} = (T_U - T_L)/4.18\sqrt{D(Y)},$$
$$\hat{C}_p = T/4.18S = (T_U - T_L)/4.18S,$$
$$\hat{C}_{pk} = (1 - k)\hat{C}_p. \tag{3}$$

例如,本文前言中所述当随机变量 Y 服从参数为$s = 1$, $t = 2$ 的卡边分布时,由工序能力指数的原始定义计算得 0.8,但由(3)式计算可得:

$\hat{C}_p = T/4.18S = 6/4.18 \times T/6S \approx 1.44 \times 0.8 = 1.152$

从而较客观地反映了工序能力与质量控制实际情况.

参考文献:

[1] 龚益鸣. 质量管理学[M]. 上海:复旦大学出版社, 2001. 291-352.

[2] 郭正光, 张鸿秀. "卡边随机现象"的一种概率模型[J]. 数理统计与管理, 1999, 18(3), 19-24.

[3] 郭正光, 张鸿秀, 郭渔冰. 卡边分布函数的特征函数与数字特征[J]. 太原重型机械学院学报, 1998, 19(1), 69-73.

【责任编辑　李晓卉】